**Mengen**

**Definition**

- Eine Menge ist eine nicht geordnete Zuordnung verschiedener Objekte zu einem Ganzen

- Die zugeordneten Objekte sind die Elemente der Menge

- Jedes Objekt kann nur einmal einer Menge zugeordnet, aber Element vieler Mengen sein

**Notierung**

- ist ein Objekt Element einer Menge schreibt man **e ∈ M**

- ist ein Objekt kein Element einer Menge schreibt man **e ∉ M**

- Bei einfachen Bildungsgesetzen, kann man die Menge mit Punkten illustrieren

**B = {1, 3, 5, 7, 9, . . .}**

- sonst die Bildungsregel als Prädikat tatsächlich aufschreiben

**B = { x | P(x) } = { x | x ist eine positive ungerade Zahl }**

**-** Die Vereinigung zweier Mengen schreibt man **A ∪ B**

ist definiert als

**A ∪ B = { x | x ist Element von A oder Element von B } = { x | x ∈ A ∨ x ∈ B }**

- Den Schnitt zweier Mengen schreibt man **A ∩ B**

Ist definiert als

**A ∩ B = { x | x ist Element von A und Element von B } = { x | x ∈ A ∧ x ∈ B }**

**-** Die einseitige Differenz schreibt man **A\B = { x | x ∈ A ∧ x ∉ B }**

**-** Die symmetrische Differenz schreibt man **AΔB = A\B ∪ B\A**

**5. Peano-Axiom für natürliche Zahlen**

(1) Die 1 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger S(n) = n + 1.

(3) Aus S(n) = S(m) folgt n = m.

(4) Die 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(5) Enthält eine Menge X die 1 und mit jeder Zahl n auch den Nachfolger S(n), so sind die

natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X

(Grund für vollständige Induktion)

**Intervalle**

Abgeschlossene Intervalle schreibt man mit [a,b]

[a, b] = { x ∈ R | a ≤ x ≤ b }

Offenes Intervall schreibt man mit (a,b)

(a, b) = { x ∈ R | a < x < b }

**Definition**

Teil- und Obermenge

A ist genau dann eine Teilmenge von B oder B Obermenge von A, geschrieben A ⊆ B, wenn gilt: **∀x ∈ A : x ∈ B**

Echte Teil- und Obermenge

A ist eine echte Teilmenge von B oder B echte Obermenge von A, geschrieben A ⊂ B, genau dann, wenn **A ⊆ B ∧ B\A ≠ ∅**

Gleicheit zweier Mengen

Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn sie gegenseitig Teilmengen sind

**M = N ⇔ (M ⊆ N) ∧ (N ⊆ M)**

Mächtigkeit

beschreibt die Größe oder Anzahl der Elemente einer Menge

Für endliche Mengen M beschreibt |M| die Anzahl der Elemente in M

Potenzmenge

Gibt die Teilmengen von M an **P(M) = { U | U ⊆ M }**

ist M eine endliche Menge mit |M| = n, ist ihre Potenzmenge **|P(M)| = 2n**

Partition

Mengensystem Z = {M1, . . . , Mn} von paarweisen disjunkten Mengen M1, . . . , Mn

Kartesische Produkte

Schreibt man **A × B = { (a, b) | a ∈ A , b ∈ B }**

Die Elemente (a,b) heißen Tupel

Sind A und B endliche Mengen mit |A| = n und |B| = m Elementen, hat |A × B| = n · m Elemente

**Regeln**

1. A ∩ B ⊆ A ⊆ A ∪ B

2. A ∩ A = A = A ∪ A Idempotenz

3. A ∩ B = B ∩ A Kommutativität

A ∪ B = B ∪ A

4. A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C Assoziativität

A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C

5. A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) Distributivität

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

6. A\(B ∪ C) = (A\B) ∩ (A\C) De Morgansche Regeln

A\(B ∩ C) = (A\B) ∪ (A\C)

**Relationen**

Eine Relation R ist eine Teilmenge des Kartesischen Produkts von A und B

**R ⊆ A × B**

Zwei Elemente stehen genau dann in Relation wenn a ∈ A, b ∈ B und (a, b) ∈ R

**a R b**

Eigenschaften

(1) R ist **symmetrisch**, wenn für alle (x, y) ∈ R auch (y, x) ∈ R folgt.

(2) R ist **antisymmetrisch**, wenn aus (x, y) ∈ R und (y, x) ∈ R folgt, dass x = y

(3) R ist **reflexiv**, wenn für alle x ∈ M gilt, dass (x, x) ∈ R

(4) R ist **transitiv**, wenn aus (x, y) ∈ R und (y, z) ∈ R folgt, dass (x, z) ∈ R

(5) R ist **linear**, wenn für jedes x, y ∈ M gilt: (x, y) ∈ R ∨ (y, x) ∈ R

Äquivalenzrelation

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation.

Äquivalenzklasse

Sei M eine Menge und R eine Äquivalenzrelation. Für ein x ∈ M ist die Äquivalenzklasse von x bezüglich R

**[x]R = { y ∈ M | x R y }**

Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M und x, y ∈ M beliebig

(1) Es gilt x ∈ [x]R

(2) Gilt x R y, so ist x ∈ [y]R

(3) Ist [x]R ∩ [y]R 6= ∅, so ist [x]R = [y]R

Quotientenmenge

Sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M, dann wird das Mengensystem

**M/R = { [x]R | x ∈ M }**

Quotientenmenge oder Faktormenge von M modulo R genannt

**Ordnungsrelationen**

Quasiordnung reflexiv und transitiv

Halbordnung reflexiv, transitiv und antisymmetrisch

Linear- oder Vollordnung reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear

**Gerichtete Graphen**

- ist eine Menge M von Knoten und einer Relation → für Kanten

- für x, y ∈ M gilt genau dann x → y, wenn von x ein Pfeil zu y geht

- Auf Zusammenhangskomponenten kann eine Quasiordnung R mit x R y definiert werden, wenn ein Knoten x eine gerichtete Verbindung zum Knoten y besitzt

**Abbildungen**

Eine Abbildung oder Funktion mit Notation f : D → W ist eine Relation auf D × W, bei dem jedes Element x ∈ D mit genau nur mit einem Element f(x) = y ∈ W in Relation steht:

f : D → W

x → f(x) = y

Für eine Funktion f : A → B und Teilmengen U ⊆ A und V ⊆ B ist

**das Bild** (Abbildung) von U unter f die Menge f(U) = { f(x)| x ∈ U }

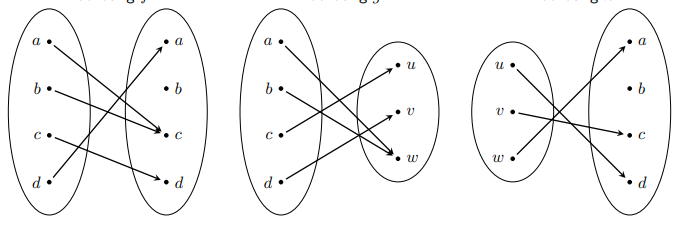
**das Urbild** (Ableitung) von V unter f die Menge f −1 (V ) = { x | f(x) ∈ V }

**Eigenschaften**

f ist **injektiv** wenn für alle x, y ∈ A mit x ≠ y folgt f(x) ≠ f(y)

f ist **surjektiv** wenn das Bild der Funktion den Wertebereich umfasst

f ist **bijektiv** wenn f injektiv und surjektiv ist



injektiv, nicht surjektiv

Nicht injektiv, aber surjektiv

Nicht injektiv, nicht surjektiv

Permutationen

die bijektive Abbildungen p : M → M auf einer endliche Menge M

Menge aller Permutationen ist über M definiert als:

SM = { p : M → M | p ist bijektiv }

Verkettung von Abbildungen

Sind f : A → B und g : B → C Abbildungen so ist deren Verkettung g ◦ f definiert als Abbildung

g ◦ f : A → C

x → g(f(x)

Genau dann, wenn eine Funktion f : A → B bijektiv ist, existiert eine inverse Funktion

f −1 : B → A mit f −1 ◦ f = idA und f ◦ f −1 = idB.

Identische Funktion

die identische Funktion oder die Identität auf der Menge M ist die Funktion

idM : M → M mit id(x) = x für alle x ∈ M ist